Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ВЕРХНЕВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРОБИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «Верхневолжский ГАУ»)

ИНЖЕНЕРНО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УТВЕРЖДЕНА
протоколом заседания
методической комиссии факуль-
тета
№ 4 от « 19» мая 2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

«Математическое моделирование в агроинженерии»

Направление подготовки / специальность	**35.04.06 Агроинженерия**
Направленность(и) (профиль(и))	**Технический сервис в АПК**
Уровень образовательной программы	**Магистратура**
Форма(ы) обучения	**Очная, заочная**
Трудоемкость дисциплины, ЗЕТ	**4**
Трудоемкость дисциплины, час.	**144**

Разработчик:

Должность
Доцент кафедры экономики, менеджмента и цифровых технологий — ________ (подпись) — А.А. Малыгин

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий кафедрой экономики, менеджмента и цифровых технологий, профессор — ________ (подпись) — О.В. Гонова

Иваново 2023

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Целью освоения дисциплины является дать обучающимся знания: об основных понятиях и математических методах, разработанных для решения экономико-математических задач в сельском хозяйстве, о теории и методологии математического моделирования в экономике; а также выработать умения в формализации выявленных взаимосвязей между экономическими явлениями с помощью математических символов, умения подбирать в соответствии с типом задачи соответствующие методы ее решения, привить первоначальные навыки в использовании пакетов прикладных программ для решения экономических задач.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

В соответствии с учебным планом дисциплина относится к	обязательной части образовательной программы
Статус дисциплины	базовая
Обеспечивающие (предшествующие) дисциплины, практики	
Обеспечиваемые (последующие) дисциплины, практики	Теоретические основы обеспечения сохраняемости технических систем в АПК, научно-исследовательская работа, основы расчета сельскохозяйственных машин и оборудования животноводства, ГИА

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (ХАРАКТЕРИСТИКА ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ)

Шифр и наименование компетенции	Индикатор(ы) достижения компетенции / планируемые результаты обучения	Номер(а) раздела (ов) дисциплины, отвечающего(их) за формирование данного (ых) индикатора (ов) достижения компетенции
ПК-7 Способен разрабатывать физические и математические модели, проводить теоретические и экспериментальные исследования процессов, явлений и объектов технического обслуживания и ремонта машин и оборудования	ИД-$1_{ПК\text{-}7}$ Разрабатывает физические и математические модели, проводит теоретические и экспериментальные исследования процессов, явлений и объектов технического обслуживания и ремонта машин и оборудования	1-6

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Содержание дисциплины

4.1.1. Очная форма:

№ п/п	Темы занятий	Виды учебных занятий и трудоемкость, час.				Контроль знаний*	Применяемые активные и интерактивные технологии обучения
		лекции	практические (семинарские)	лабораторные	самостоятельная работа		
1.	Введение в дисциплину: понятия модели, моделирования. Этапы экономико-математического моделирования	2	4		8	*Т, ЗаО*	
2.	Линейное программирование	2	2		8	*Т, ЗаО*	
3.	Модели региональной экономики	2	4		20	*ВЛР, ЗаО*	Решение производственных ситуаций
4.	Модели производственного менеджмента	2	4		20	*ВЛР, ЗаО*	Решение производственных ситуаций
5.	Модели маркетинга	2	4		20	*ВЛР, ЗаО*	Решение производственных ситуаций
6.	Модели сельскохозяйственного производства	6	16		18	*ВЛР, ЗаО*	Решение производственных ситуаций
	Итого	16	34		94		

** Указывается форма контроля. Например: УО – устный опрос, КЛ – конспект лекции, КР – контрольная работа, ВЛР – выполнение лабораторной работы, ВПР – выполнение практической работы, К – коллоквиум, Т – тестирование, Р – реферат, Д – доклад, ЗКР – защита курсовой работы, ЗКП – защита курсового проекта, Э – экзамен, З – зачет ЗаО – зачет с оценкой.*

4.1.2. Заочная форма:

№ п/п	Темы занятий	Виды учебных занятий и трудоемкость, час.				Контроль знаний	Применяемые активные и интерактивные технологии обучения
		лекции	практические (семинарские)	лабораторные	самостоятельная работа		
1.	Введение в дисциплину: понятия модели, моделирования. Этапы экономико-математического моделирования	1		0	20	*Т, ЗаО*	
2.	Линейное программирование	1		2	26	*Т, ЗаО*	
3.	Модели региональной экономики	1		0	20	*ВЛР, ЗаО*	Решение производственных ситуаций
4.	Модели производственного менеджмента	1		0	20	*ВЛР, ЗаО*	Решение производственных ситуаций
5.	Модели маркетинга	1		0	20	*ВЛР, ЗаО*	Решение производственных ситуаций
6.	Модели сельскохозяйственного производства	1		6	24	*ВЛР, ЗаО*	Решение производственных ситуаций
	Итого	6		8	130		

4.2. Распределение часов дисциплины по видам работы и форма контроля*

** Э – экзамен, З – зачет, ЗаО – зачет с оценкой, КП – курсовой проект, КР – курсовая работа, К – контрольная работа.*

4.2.1. Очная форма:

Вид занятий	1 курс		2 курс	
	1 сем.	2 сем.	3 сем.	4 сем.
Лекции	16			
Лабораторные	34			
Практические				
Итого контактной работы	50			
Самостоятельная работа	94			
Форма контроля	*ЗаО*			

4.2.2. Заочная форма:

Вид занятий	1 курс	2 курс
Лекции	6	
Лабораторные	8	
Практические		
Итого контактной работы	14	
Самостоятельная работа и контроль	130	
Форма контроля	*ЗаО*	

5. ОРГАНИЗАЦИЯ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

5.1. Содержание самостоятельной работы по дисциплине

Темы индивидуальных заданий:

- Экономико-математическая модель оптимизации структуры посевных площадей под товарной продукцией растениеводства.
- Экономико-математическая модель оптимизации структуры посевных площадей кормовых культур при заданном объеме животноводства.
- Экономико-математическая модель организации угодий и севооборотов хозяйства.
- Экономико-математическая модель оптимального распределения минеральных удобрений.
- Экономико-математическая модель оптимизации грузоперевозок.
- Экономико-математическая модель состава и использования машино-тракторного парка.
- Экономико-математическая модель планирования оптимальных рационов кормления скота.
- Экономико-математическая модель использования (распределения) заготовленных кормов.
- Экономико-математическая модель структуры стада крупного рогатого скота.
- Экономико-математическая модель оптимального годового оборота стада крупного рогатого скота.
- Экономико-математическая модель производственно-отраслевой структуры сельскохозяйственного предприятия.
- Экономико-математическая модель определения оптимального размера землепользования сельскохозяйственного предприятия (на примере фермерского хозяйства).

– Темы, выносимые на самостоятельную проработку:

- История возникновения и развития методов и моделей.
- Место и роль математического моделирования в современном мире.
- Особенности экономико-математических моделей применяемых в сельском хозяйстве.
- Необходимость и возможность применения моделей в сельском хозяйстве.
- Моделирование как метод, методология, технология.
- Линейность моделей и нелинейность явлений природы и общества.
- Математическое моделирование: история, личности, будущее.
- Компьютерное моделирование и его особенности.

5.2. Контроль самостоятельной работы

Оценка результатов самостоятельной работы организуется следующим образом:

- устный опрос по вопросам, выносимым на самостоятельное изучение;
- проверка выполненного задания.

5.3. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы

При выполнении самостоятельной работы рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу, методические указания и разработки кафедры, а так же Интернет-ресурсы.

1. Моделирование социально-экономических процессов : метод. указания и задания для самост. раб. / Н. В. Забелина. - Иваново : ИГСХА, 2016. - 55с.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Основная учебная литература, необходимая для освоения дисциплины

1) Петров, А. В. Моделирование процессов и систем : учебное пособие / А. В. Петров. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 288 с. — ISBN 978-5-8114-1886-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/68472 — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2) Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем [учеб.пособие для студ. вузов]М., Финансы и статистика -2001. -368с. **3 экз.**

6.2. Дополнительная учебная литература, необходимая для освоения дисциплины

3) Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учебное пособие. — М.: Высшая школа, 1986. — 348 с.-17 экз.
4) Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем [учеб. пособие для студ. вузов] М., Финансы и статистика - 2001. 368с.-3 экз.
5) Бурнаева Э.Г. Обработка и представление данных в MS Excel [Электронный ресурс] : учебное пособие / Э.Г. Бурнаева, С.Н. Леора. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2016. — 156 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=71706
6) Ильченко А.Н. Экономико-математические методы. –М.: Финансы и статистика,2009.-9экз.
7) Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [учеб. пособие для вузов] М., Высш. шк. - 2002. 479с. **45 экз.**

6.3. Ресурсы сети «Интернет», необходимые для освоения дисциплины

1. Основы теории принятия решений – http://b-i.narod.ru/sys.htm
2. Электронные книги по экономико- математическим методам и моделям - http://www.aup.ru/books/i008.htm
3. Экономико-математические методы и прикладные модели- http://www.eusi.ru/umk/vzfei_ekonomiko_matematiceskie_metody_i/index.shtml
4. Характеристика методов решения задач оптимизации - http://matlab.exponenta.ru/optimiz/book_2/1.php

6.4. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

1. Ильченко А.Н. Практикум по экономико-математическим методам /А.Н.Ильченко, О.Л. Ксенофонтова, Г.В. Канакина – М.: Финансы и статистика, 2009. – 288с.
2. Моделирование социально-экономических процессов: метод. указания и задания для самост. раб. / Н. В. Забелина. - Иваново: ИГСХА, 2016. - 55с.

6.5. Информационные справочные системы, используемые для освоения дисциплины (при необходимости)

1. Консультант Плюс

6.6. Программное обеспечение, используемое для освоения дисциплины (при необходимости)

1) Интегрированный пакет прикладных программ общего назначения Microsoft Office
2) Операционная система типа Windows
3) Интернет – браузер

6.7. Информационные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

1) обработка текстовой, графической и эмпирической информации;

2) самостоятельный поиск дополнительного учебного и научного материала, с использованием поисковых систем и сайтов сети Интернет, электронных энциклопедий и баз данных.

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА, НЕОБХОДИМАЯ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

№ п/п	Наименование специальных помещений* и помещений для самостоятельной работы	Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы
1	Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа	укомплектована специализированной (учебной) мебелью, набором демонстрационного оборудования и учебно-наглядными пособиями, обеспечивающими тематические иллюстрации, соответствующие рабочей программе дисциплины, а также техническими средствами обучения (в том числе, переносными), служащие для представления учебной информации большой аудитории
2.	Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, для групповых и индивидуальных консультаций, для текущего контроля и промежуточной аттестации	укомплектована специализированной (учебной) мебелью, переносными техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации
3.	Помещение для самостоятельной работы	укомплектовано специализированной (учебной) мебелью, оснащено компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечено доступом в электронную информационно-образовательную среду организации

**Специальные помещения - учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.*

Приложение № 1
к рабочей программе по дисциплине
Математическое моделирование в агроинженерии

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«Математическое моделирование в агроинженерии»

1. Перечень компетенций, формируемых на данном этапе

1.1.Очная форма

Шифр и наименование компетенции	Индикатор(ы) достижения компетенции / планируемые результаты обучения	Форма контроля*	Оценочные средства
1	2	3	4
ПК-7 Способен разрабатывать физические и математические модели, проводить теоретические и экспериментальные исследования процессов, явлений и объектов технического обслуживания и ремонта машин и оборудования	ИД-1$_{ПК-7}$ Разрабатывает физические и математические модели, проводит теоретические и экспериментальные исследования процессов, явлений и объектов технического обслуживания и ремонта машин и оборудования	*Т, ВЛР, ЗаО*	*Тестовые задания, база заданий для кейс-задач, Комплект вопросов к зачету с оценкой*

** Указывается форма контроля. Например: УО – устный опрос, КЛ – конспект лекции, КР – контрольная работа, ВЛР – выполнение лабораторной работы, ВПР – выполнение практической работы, К – коллоквиум, Т – тестирование, Р – реферат, Д – доклад, ЗКР – защита курсовой работы, ЗКП – защита курсового проекта, Э – экзамен, З – зачет, ЗаО – зачет с оценкой.*

1.2.Заочная форма

Шифр и наименование компетенции	Индикатор(ы) достижения компетенции / планируемые результаты обучения	Форма контроля*	Оценочные средства
1	2	3	4
ПК-7 Способен разрабатывать физические и математические модели, проводить теоретические и экспериментальные исследования процессов, явлений и объектов технического обслуживания и ремонта машин и оборудования	ИД-$1_{ПК-7}$ Разрабатывает физические и математические модели, проводит теоретические и экспериментальные исследования процессов, явлений и объектов технического обслуживания и ремонта машин и оборудования	*Т, ВЛР, ЗаО*	*Тестовые задания, база заданий для кейс-задач, Комплект вопросов к зачету с оценкой*

** Указывается форма контроля. Например: УО – устный опрос, КЛ – конспект лекции, КР – контрольная работа, ВЛР – выполнение лабораторной работы, ВПР – выполнение практической работы, К – коллоквиум, Т – тестирование, Р – реферат, Д – доклад, ЗКР – защита курсовой работы, ЗКП – защита курсового проекта, Э – экзамен, З – зачет, ЗаО – зачет с оценкой.*

2. Показатели и критерии оценивания сформированности компетенций на данном этапе их формирования

Показатели	Критерии оценивания*			
	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	отлично
	не зачтено	зачтено		
Полнота знаний	Уровень знаний ниже минимальных требований, имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний, допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
Наличие умений	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения, имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения, решены типовые задачи с негрубыми ошибками, выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с негрубыми ошибками, выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме
Наличие навыков (владение опытом)	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки, имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов
Характеристика сформированности компетенции	Компетенция в полной мере не сформирована. Имеющихся знаний, умений, навыков недостаточно для решения практических (профессиональных) задач	Сформированность компетенции соответствует минимальным требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков в целом достаточно для решения практических (профессиональных) задач, но требуется дополнительная практика по большинству практических задач	Сформированность компетенции в целом соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков и мотивации в целом достаточно для решения стандартных практических (профессиональных) задач	Сформированность компетенции полностью соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков и мотивации в полной мере достаточно для решения сложных практических (профессиональных) задач
Уровень сформированности компетенций	Низкий	Ниже среднего	Средний	Высокий

** Преподаватель вправе изменить критерии оценивания в соответствии с ФГОС ВО и особенностями ОПОП.*

3. Оценочные средства

3.1. Тестовые задания

3.1.1. Тест

1.Запись задачи линейного программирования в матричном виде – это:

а) $\begin{cases} Ax \le в \\ x \ge 0 \end{cases}$

б) $(c, x) \to \max$
$Ax \le в$

в) $(c, x) \to \max$
$\begin{cases} Ax \le в \\ x \ge 0 \end{cases}$

г) $(c, x) \to \max$
$\begin{cases} Ax \ge в \\ x \le 0 \end{cases}$

2. Решение оптимизационных задач сводится к нахождению:

а) числа ограничений задачи и значения целевой функции;
б) значения переменных величин и целевой функции;
в) значения целевой функции задачи;
г) значения переменных величин задачи.

3.Целевая функция задачи – это:

а) система ограничений задачи;
б) условие по выполнению плановых показателей;
в) оптимальное значение переменных задачи;
г) цель задачи, выраженная в математической форме.

4. Как изменить направление целевой функции:

а) умножить ее на «-1»;
б) вычесть из нее дополнительные переменные;
в) добавить к ней достаточно большое число;
г) разделить ее на достаточно большое число.

5. Каким способом можно преобразовать стандартную задачу линейного программирования к каноническому виду:

а) вычесть из левой части каждого ограничения дополнительную переменную;
б) заменить знак ограничений «≤» на знак «=»;
в) добавить к левой части каждого ограничения дополнительную переменную;
г) ввести искусственный базис.

6. Количество переменных в двойственной задаче линейного программирования равно:

а) количеству переменных в прямой задаче;
б) количеству основных ограничений прямой задачи;
в) количеству дополнительных переменных прямой задачи;
г) количеству основных ограничений двойственной задачи.

7. Двойственные оценки – это:

а) значение небазисных переменных;
б) оптимальное решение двойственной задачи;
в) значение дополнительных переменных;
г) оптимальное решение прямой задачи.

8.Для нахождения оптимального решения (плана) задачи линейного программирования может быть использован один из следующих методов:

а) распределительный метод;
б) метод наименьших квадратов;
в) метод Ньютона;
г) симплекс – метод.

9.Какой метод не может быть использован для поиска первого опорного решения в транспортной задаче:

а) метод северо-западного угла;
б) метод минимального элемента;
в) симплекс-метод;
г) метод дифференциальных рент.

10. В какой форме записана задача линейного программирования

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le в_i, i = 1,2,\ldots,m \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,n \end{cases}:$$

а) матричная форма;
б) развёрнутая форма;
в) сокращенная форма;
г) каноническая форма.

11. Для нахождения оптимального решения (плана) транспортной задачи может быть использован один из следующих методов:

а) метод северо-западного угла;
б) метод наименьших квадратов;
в) метод максимального правдоподобия;
г) метод потенциалов.

12. Если в задаче линейного программирования имеются ограничения равенства, то при решении ее симплекс-методом используется:

а) искусственный базис;
б) естественный базис;
в) дополнительные переменные;
г) двойственные переменные.

13. Экономико-математическая модель транспортной задачи считается закрытой, если:

а) число переменных задачи равно числу основных ограничений задачи;
б) сумма объёмов производства продукции равна сумме объёмов ее потребления;
в) от каждого производителя перевозится ненулевое количество продукции каждому потребителю;
г) сумма объёмов производства продукции больше суммы объёмов её потребления.

15. Какие задачи математического программирования можно решать графическим методом:

а) все задачи линейного программирования;
б) задачи, в которых одна или две переменных;
в) задачи с целочисленными коэффициентами;
г) задачи нелинейного программирования.

16. Дополнительная переменная основного ограничения задачи линейного программирования показывает:

а) насколько левая часть ограничения отличается от правой части в соответствии с типом ограничения;
б) как изменится целевая функция при изменении правой части ограничения;
в) дополнительную потребность в производственных ресурсах;

г) объём используемых ресурсов.

17. Задача математического программирования называется несовместной, если:

а) множество допустимых решений задачи пусто;
б) множество допустимых решений задачи не ограничено;
в) целевая функция задачи не ограничена;
г) количество ограничений больше количества переменных.

18. Транспортная задача является вырожденной, если:

а) количество заполненных грузами клеток таблицы равно количеству потенциалов;
б) количество заполненных грузами клеток таблицы на 1 меньше количества потенциалов;
в) количество заполненных грузами клеток таблицы на 1 больше количества потенциалов;
г) количество заполненных грузами клеток таблицы равно количеству производителей и потребителей.

19.Задачей дробно-линейного программирования называется задача математического программирования, в которой:

а) коэффициенты при переменных принимают дробные значения;
б) целевая функция и все ограничения описываются линейными функциями;
в) переменные задачи принимают только дробные значения;
г) целевая функция представляет отношение двух линейных функций, и все ограничения описываются линейными функциями.

20. Целевая функция задачи линейного программирования достигает оптимального значения:

а) в одной из вершин многогранника допустимых решений задачи;
б) внутри множества допустимых решений задачи;
в) во всех точках границы множества допустимых решений задачи;
г) только при отрицательных значениях переменных задачи.

21. Соотнесите термин и его определение:

① опорное решение
② допустимое решение задачи
③ оптимальное решение

а) точка, удовлетворяющая ограничениям задачи
б) точка, в которой целевая функция не достигает максимального значения
в) вершины многоугольника допустимых решений задачи
г) допустимое решение, в котором целевая функция достигает своего максимального значения

22. Что собой представляет функция Лагранжа:

а) это сумма целевой функции задачи и основных ограничений задачи, умноженных на двойственные переменные;
б) целевая функция задачи нелинейного программирования;
в) сумма функций, описывающих основные ограничения задачи линейного программирования;
г) целевая функция двойственной задачи линейного программирования.

23. Задача линейного программирования является задачей параметрического программирования, когда:

а) все коэффициенты задачи зависят от разных параметров;
б) либо коэффициенты целевой функции, либо коэффициенты матрицы ограничений, либо элементы вектора правых частей зависят от одного параметра;
в) отдельные переменные задачи зависят от параметров;
г) только коэффициенты целевой функции зависят от параметра.

24. Для нахождения оптимального решения задачи нелинейного программирования может быть использован один из следующих методов:

а) распределительный метод;

б) метод наименьших квадратов;
в) метод множителей Лагранжа;
г) симплекс – метод.

25. Целочисленной задачей линейного программирования называется задача математического программирования, в которой:

а) коэффициенты при переменных принимают целые значения;
б) все или часть переменных принимают только целые значения;
в) элементы правой части ограничений принимают целые значения;
г) коэффициенты целевой функции целочисленные.

3.1.2. Методические материалы

Обучающиеся проходят тест общим количеством 25 вопросов. За каждый правильный ответ в тестах студент получает 0,5 балла.

Порядок проведения тестов представлен в Положении ПВД-07 «О проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся».

3.2. База заданий для кейс-задач.

Кейс-задание 1. Решение систем линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = в_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = в_m \end{cases}, \qquad (1)$$

где aij – коэффициент в i – ом уравнении при j - ой переменной; bi –свободный член i – го уравнения, m – количество уравнений в системе, n - количество переменных.

Определение 1. Система линейных уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Определение 2. Совместная система линейных уравнений называется определённой, если она имеет единственное решение, и неопределённой, если имеет бесчисленное множество решений.

Определение 3. Преобразования, которые систему линейных уравнений переводят в равносильную, эквивалентную ей систему, называются элементарными.

К элементарным преобразованиям относятся преобразования следующего вида:

1. Перестановка местами любых двух уравнений.
2. Умножение (деление) обеих частей уравнения на число, отличное от нуля.

3.Прибавление (вычитание) к обеим частям любого уровня соответствующих частей другого уравнения, умноженного на произвольное число, отличное от нуля.

4. Удаление из системы после её преобразования уравнения вида:

$0 \cdot x1 + 0 \cdot x2 + \ldots + 0 \cdot xn = 0.$

Определение 4. Уравнение системы называется линейно зависимым от других уравнений, если его можно получить из этих уравнений, используя элементарные преобразования, в противном случае оно называется линейно независимым.

Идея метода последовательного исключения неизвестных (метод Жордана – Гаусса).

Используя элементарные преобразования, необходимо в левой части каждого уравнения оставить по одной различной переменной с коэффициентом 1, тогда в правой части уравнения получим решение системы. Для этого нужно первое уравнение разделить на коэффициент при x1. Затем преобразованное первое уравнение поочерёдно умножить на соответствующие коэффициенты при переменной x1 в других уравнениях и полученный результат вычесть из этих уравнений.

Исключив переменную x1 из всех уравнений, кроме первого, тем же способом исключаем переменную x2 из всех уравнений, кроме второго. Для чего второе уравнение делим на коэффициент при x2, а затем вычитаем его из других уравнений, умножая на соответствующие коэффициенты при x2 в этих уравнениях. Потом исключаем переменную x3, и т. д.

Задания для самостоятельного решения

Системы уравнений 1.1-1.10 решить методом последовательного исключения неизвестных.

1.1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = -4 \\ 5x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 \quad 5x_3 - x_4 = 10 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 = 5 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 20 \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 9x_4 = 4 \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ 6x_1 + 8x_2 - 14x_3 = 17 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 11x_2 - 16x_3 = 21 \end{cases}$ 1.8. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 15x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$ 1.10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 8 \end{cases}$

Кейс-задание 2. Графический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования относительно двух неизвестных:

$$c_1x_1 + c_2x_2 \to \max \qquad (2)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \qquad (3) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \qquad (4) \end{cases}$$

где (2) – целевая функция задачи, (3) – основные ограничения, (4) – условия неотрицательности переменных.

Неравенствам (3) на плоскости соответствуют полуплоскости. Чтобы их построить, необходимо сначала построить прямые, отделяющие эти полуплоскости. Уравнения отделяющих прямых получаем их соответствующих неравенств путём замены знака неравенств на " = ". Отделяющие прямые лучше строить по двум точкам, которые являются точками пересечения с осями координат (у этих точек одна из координат равна нулю).

Чтобы выбрать полуплоскость, соответствующую заданному неравенству, достаточно проверить, принадлежит ли точка начала координат (0,0) полуплоскости, подставив координаты (0,0) в неравенство. Если неравенство окажется справедливым, то принадлежит, в противном случае – нет.

Неравенства (3) должны выполняться одновременно. Это означает, что решение задачи будет лежать сразу на всех построенных полуплоскостях. С математической точки зрения это равносильно тому, что решение принадлежит пересечению построенных полуплоскостей.

Условие неотрицательности переменных (4) требует, чтобы из пересечения полуплоскостей выбрали ту часть, которая лежит в 1-ой четверти.

Целевая функция (2), как функция от двух переменных, имеет пространственное представление. Для изображения её на плоскости используют линии уровня, уравнения которых получаем из целевой функции, приравнивая её к различным числовым значениям:

$c1x1 + c2x2 = c$, где $c \in (-\infty, +\infty)$. (5)

Достаточно построить две линии уровня (выбрав произвольные значения С), чтобы, сравнив на них значения целевой функции, определить направление max или min.

Возможные варианты решения задачи линейного программирования графическим методом представлены на рис 1.

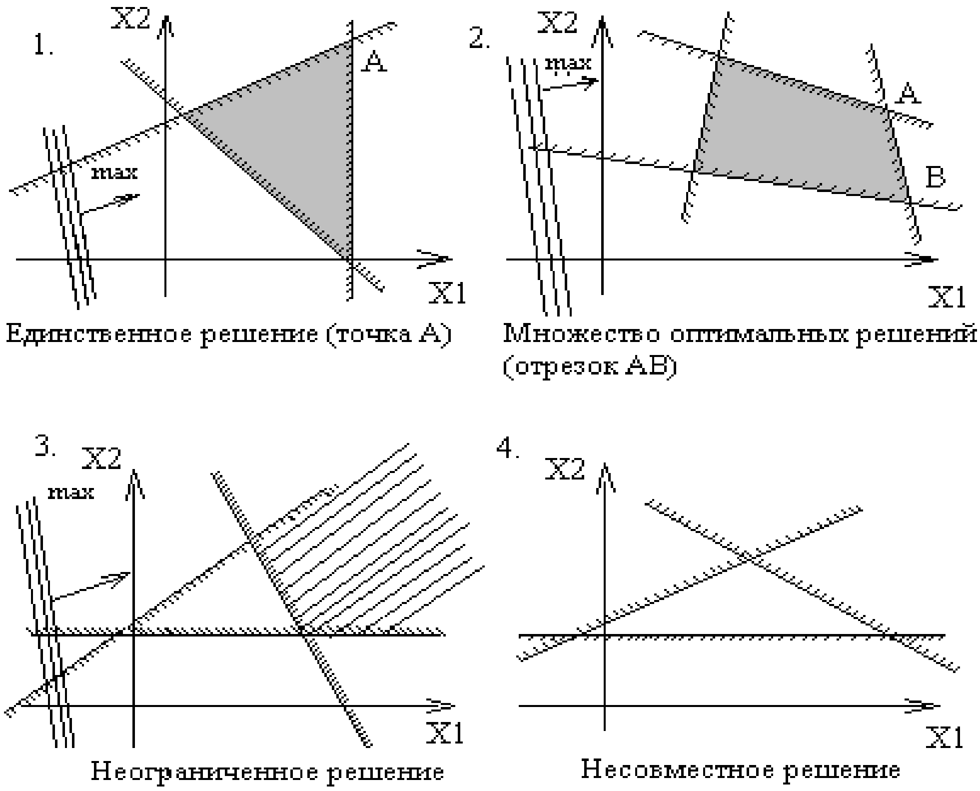

Рисунок 1- Возможные варианты решения задачи линейного программирования графическим методом

Задания для самостоятельного решения

Для задач 2.1-2.10 найти решение графическим методом.

2.1. $f(x) = 2x1 + 4x2 \to \max (\min)$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 40 \\ 12x_1 + 2x_2 \ge 24 \\ 2x_1 \le 6 \\ x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.2. $f(x) = -x1 \to \max (\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 - 2x_2 \le 3 \\ -x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.3. $f(x) = 2x1 + 3x2 \to \max (\min)$

2.4. $f(x) = -x2 \to \max (\min)$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 2x_1 + 6x_2 \le 12 \\ 2x_1 \qquad \le 6 \\ \qquad 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 7x_1 + 2x_2 \ge 14 \\ \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.5. f(x) = -x1 + x2 →·max (min)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.6. f(x) =2 x1 – 3x2→ max (min)

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 10 \\ x_1 - 5x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.7. f(x) = 10x1 + 14x2 →·max (min)

$$\begin{cases} 10x_1 + 14x_2 \le 70 \\ x_1 + x_2 \ge 24 \\ 2x_1 - x_2 \le 6 \\ \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.8. f(x) = x1-x2→ max (min)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ 2x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1 \qquad \ge 1 \\ \qquad x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.9. f(x) = x1 + 2x2 →·max (min)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.10. f(x) = – x2→ max (min)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le -6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Кейс-задание 3. Решение задач линейного программирования симплекс – методом

Для решения задач линейного программирования был предложен симплекс-метод. Разработанный в 1947-1949 гг. американским математиком Дж. Данцигом. Идея состоит в целенаправленном переборе вершин многогранника допустимых решений (опорных планов) в направлении улучшения целевой функции.

Симплекс-метод – это универсальный метод решения задач линейного программирования, представляющий собой интерационный процесс, который начинается с одного решения и в поисках лучшего варианта движется по угловым точкам области возможных решений до тех пор. Пока не достигнет оптимального значения.

Симплекс – метод применяют к задачам линейного программирования, заданным в каноническом виде, где элементы вектора правых частей ограничений принимают неотрицательные значения:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,n \\ b_i \ge 0, i = 1,2,\ldots m \\ m \le n. \end{cases} \qquad (6)$$

Основные положения, на которых базируется симплекс – метод

1. Каждая вершина многогранника допустимых решений обладает следующими свойствами:

- m её координат имеют значения ≥0 (их называют базисными переменными);
- остальные (n - m) координат равны нулю (их называют свободными переменными);
- вектор – столбцы матрицы коэффициентов А, соответствующие базисным переменным вершины являются линейно независимыми, т.е. с - помощью линейных преобразований их можно привести к единичной матрице.

2. Соседние вершины многогранника допустимых решений отличаются только одной базисной переменной.

3. Переход из одной вершины в другую осуществляется с помощью метода последовательного исключения неизвестных, который называется методом Жордана-Гаусса. В результате чего из базисного решения выводим одну переменную, а вводим другую. Причём, из свободных переменных, не вошедших в базис, вводим ту, которая больше всех уменьшает значение целевой функции. А из базисных переменных выводим ту, которая не нарушает условия неотрицательности базисных переменных у новой вершины. При этом вектор – столбцы матрицы ограничений А, соответствующие новой вершине, так же будет линейно независимыми, т.е. образовывать единичную матрицу.

Алгоритм симплекс – метода

1. Определение первоначального опорного решения (угловой точки).

Для поиска первого опорного решения можно использовать следующие методы:

- метод естественного базиса,

- метод искусственного базиса.

Метод естественного базиса применяется для задач линейного программирования, записанных в виде, где все ограничения неравенства имеют тип "≤" и элементы вектора правых частей ограничений неотрицательны.

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{14}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{24}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,n \\ b_i \ge 0, i = 1,2,\ldots,m. \end{cases} \tag{7}$$

В этом случае задачу (7) приводим к каноническому виду (8), вводя в левую часть каждого ограничения неравенства самостоятельную переменную, которые и будут образовывать естественный базис.

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \quad x_{n+m} = b_m \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,n+m \\ b_i \ge 0, i = 1,2,\ldots,m \end{cases} \tag{8}$$

Метод искусственного базиса применяется для задач, заданных в каноническом виде, или с ограничениями смешанного типа. Если в задаче ограничения смешанного типа, то её сначала преобразуем к каноническому виду , причем нужно отслеживать, чтобы элементы вектора правых частей были неотрицательными, а затем в каждое ограничение равенство водим по самостоятельной переменной yj , которые и будут образовывать искусственный базис. При этом в целевой функции переменные искусственного базиса записываются с большими отрицательными коэффициентами. В результате преобразований получим задачу вида (9).

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n - My_1 - My_2 - ... - My_m \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1 \qquad\qquad = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \qquad + y_2 \qquad = b_2 \\ \text{.......... ....} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \qquad\qquad y_m = b_m \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,..., n \\ y_i \geq 0,\ i = 1,2,..., m \\ b_i \geq 0, i = 1,2,..., m \end{cases} \qquad (9)$$

2. Составление симплексной таблицы:

базис	Cбазис	b	C1	C2	…	Cn
			X1	X2	…	Xn
X1базис	C1базис	b1	a11	a12	…	a1n
X2базис	C2базис	b2	a21	a22	…	a2n
…	…	…	…	…	…	…
Xмбазис	Cmбазис	bm	am1	am2	…	amn
		(Cбазис,b)	Δ_1	Δ_2	…	Δn

Рисунок 2- Симплексная таблица

Правила заполнения первой симплексной таблицы

1) Вместо C1, C2, …, Cn записываем соответствующие коэффициенты целевой функции.
2) Вместо aij записываем коэффициенты при неизвестных из основных ограничений задачи.
3) Вместо Xiбазис записываем имена переменных, вошедших в базис, в той последовательности, в которой они образуют единичную матрицу.
4) Вместо Ciбазис записываем коэффициенты целевой функции при соответствующих базисных переменных.
5) Вместо bi записываем элементы вектора правых частей задачи.
6) $$(C^{базис}, b) = \sum_{i=1}^{m} C_i^{базис} \cdot b_i. \qquad (10)$$
7) $$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} C_i^{базис} \cdot a_{ij} - C_j,\ j = 1,2,..., n \qquad (11)$$

Оптимальное значение переменных соответствует элементам из столбца «b» последней симплексной таблицы, а максимальное значение целевой функции содержимому ячейки (сбазис ,b).

3. Проверка первоначального плана на оптимальность.

Выясняем, имеется ли хотя бы одно отрицательное число Δj. Если таких чисел нет, то найденное опорное решение является оптимальным. Если же среди чисел Δj имеются отрицательные, то либо переходят к новому опорному решению, либо устанавливают неразрешимость задачи, когда все коэффициенты столбца матрицы ограничений А, соответствующего отрицательному Δj, тоже отрицательны.

4. Определение ведущего (направляющего) столбца. Ведущий столбец показывает, какая переменная на следующем шаге перейдет из свободных (небазисных) в базисные переменные. Направляющий столбец (номер вводимой в базис переменной) определяем наибольшим по абсолютной величине отрицательным числом Δj. Пусть это будет к-ый столбец.

5. Определение разрешающей (направляющей) строки. Разрешающая строка определяет ту переменную, которая на следующем шаге выйдет из базиса и станет свободной (небазисной). Направляющая строка (номер выводимой из базиса переменной) соответствует минимальному из всех соотношений $\frac{b_i}{a_{ik}}$ для положительных значений aik.

6. Построение нового опорного плана. Переход к новому плану осуществляется в результате пересчета симплекс-таблицы методом Жордана – Гаусса. Строим новую симплекс – таблицу.

Правила формирования новой симплекс-таблицы:

1) В левом столбце записывается новый базис;
2) Разрешающий элемент заменяется обратной его величиной $\frac{1}{\grave{a}_{ik}}$;
3) Элементы разрешающей строки замещают соответствующими отношениями прежних коэффициентов этой строки к разрешающему элементу;
4) Элементы ведущего столбца определяют делением прежних коэффициентов этого столбца на разрешающий элемент и взятых с противоположным знаком;
5) Оставшиеся элементы симплексной таблицы вычисляют по правилу прямоугольника.

7. Выполнение этапа 3. И так далее пока не будет найдено оптимальное решение.

Задания для самостоятельного решения.

В задачах 3.1-3.10 найти решение симплекс-методом.

3.1. f(x) = - x1 + 2x2 $\rightarrow$ max

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 23 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 20 \\ 3x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3.2. f(x) = x1 +x2 – x3 + + x6$\rightarrow$max

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_5 + x_6 = 4 \\ x_2 - 2x_5 - x_6 = 5 \\ -x_3 + 3x_5 - x_6 = 7 \\ -x_3 + x_4 + 4x_5 - 4x_6 = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

3.3. f(x) = x1 - 3x2 + x3 $\rightarrow$ max

3.4. f(x) = 2x1 – 3x2 $\rightarrow$max

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7 \\ -2x_1 + 4x_2 \qquad \le 12 \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ -x_1 + 2x_2 \ge -4 \\ 5x_1 - 4x_2 \le 40 \\ -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3.5. f(x) = -2x1 + x2 -3x3 $\to$ min

$$\begin{cases} -3x_1 \qquad + x_3 \le -8 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

3.6. f(x) = 2x1 – 2x2 – x3 – x4 $\to$min

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

3.7. 2x1 – 2x2 – x3 – x4 $\to$max

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \qquad\qquad \le 3 \\ \qquad x_2 + 4x_3 + x_4 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

3.8. f(x) = -2x1 + x2 -3x3 $\to$ min

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

3.9. f(x) = x1 + x2 + x3 + x4 $\to$min

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad \ge 8 \\ x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

3.10. f(x) = 7x1 + 4x2 – 3x3 + 2x4 $\to$min

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 \le 45 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 68 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Кейс-задание 4. Двойственные задачи линейного программирования

Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом поставить в соответствие другую задачу линейного программирования, которую называют двойственной по отношению к исходной задаче. Исходная и двойственная задачи тесно связаны между собой и образуют единую пару двойственных задач.

Прежде чем строить двойственную задачу, предварительно исходную задачу линейного программирования нужно привести к виду, где все ограничения неравенства имеют один тип, а целевая функция - направление, противоположное типу ограничений неравенств.

Правила построения двойственной задачи.

1. Целевая функция в двойственной задаче меняет своё направление на противоположное.

2. Количество двойственных переменных равно количеству основных ограничений исходной задачи.

3. Двойственная переменная, соответствующая ограничению равенству, является неограниченной по знаку, а соответствующая ограничению неравенству – неотрицательной.

4. Вектор правых частей ограничений исходной задачи является вектором коэффициентов целевой функции в двойственной задаче.

5. Вектор коэффициентов целевой функции исходной задачи является вектором правых частей ограничений в двойственной задаче.

6. Матрица коэффициентов ограничений двойственной задачи – это транспонированная матрица коэффициентов исходной задачи, т.е. строка коэффициентов исходной задачи, является столбцом коэффициентов двойственной задачи.

7. Неотрицательным переменным исходной задачи соответствуют ограничения неравенства в двойственной задаче, причем тип неравенства меняется на противоположный, по сравнению с исходной задачей. А неограниченной переменной исходной задачи соответствует ограничение равенство в двойственной задаче.

Соотношение двойственности является симметричным, т.е. двойственная задача по отношению к двойственной совпадает с исходной.

Если исходная задача линейного программирования записана в стандартном виде: $(c, x) \to \max$

$$\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0, \end{cases} \tag{12}$$

то соответствующая ей двойственная задача записывается следующим образом:

$$(b, y) \to \min$$

$$\begin{cases} A^T y \ge C \\ y \ge 0. \end{cases} \tag{13}$$

Задания для самостоятельного решения.

Для задач линейного программирования 4.1-4.10 построить двойственные задачи.

4.1. $x1 + 2x2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 - x_2 \ge -5 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4.2. $3x1 + 3x2 – 4x3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 18 \\ 4x_1 \qquad - 5x_3 \le 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

4.3. $2x1 – 3x2 + x3 – 3x4 + x5 \to \min$

4.4. $x1 + 3x2 – 5x4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \ge 8 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28 \\ -3x_1 + 5x_2 \quad -3x_4 \le 30 \\ 4x_1 - 2x_2 \quad +8x_4 \le 32 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

4.5. 27x1 + 10x2 + 15x3 + 28x4 → max

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

4.6. -2x1 + x4 + 3x5 → max

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \quad + 3x_4 + x_5 = 8 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6 \\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

4.8. x1 – 2x2 – 4x3 + 2x4 + 3x5→ max

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 18 \\ -2x_2 + 3x_3 + x_4 \ge 24 \\ -x_1 + 4x_2 \quad - x_4 \ge 12 \end{cases}$$

4.7. x1 – 2x2 + 5x3 → max

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 20 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 \ge 19 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4.9. –3x1 + 4x2 – 6x3 → min

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 8 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 \ge 7 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

4.10. 4x1 + x2 – 2x3 → max

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 4x_3 \ge -12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 11 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Кейс-задание 5. Решение транспортной задачи методом потенциалов

Рассмотрим следующую транспортную задачу

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1,2,\ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1,2,\ldots, n \\ x_{ij} \ge 0, \ i = 1,2,\ldots, m; \ j = 1,2,\ldots, n \end{cases} \tag{14}$$

Типы математических моделей транспортной задачи

В модели оптимального планирования перевозок должно выполнятся равенство:

$$\sum_{i=1}^{m} \grave{a}_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad (24)$$

Равенство означает, что суммарный запас груза должен равняться суммарной потребности.

Модели, в которых выполняется балансовое равенство, называют закрытыми, в которых равенство не выполняется – открытыми $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j,$.

Уравнение баланса выступает обязательным условием решения закрытой транспортной задачи. Поэтому когда в исходных условиях дана открытая задача. Её необходимо привести к закрытой форме.

Способы преобразования транспортной задачи открытого типа к закрытому

1. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j,$ то вводят фиктивного (n+1)-го потребителя, у которого потребность в продукции составит $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, а затраты на перевозку продукции $C_{i(n+1)} = 0, i = 1,2,...,m.$

2. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$ то вводят фиктивного (m+1)-го производителя, объём производимой продукции которого равен $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i,$ а затраты на транспортировку продукции $C_{(m+1)j} = 0, j = 1,2,...,n.$

Алгоритм метода потенциалов

1. Строим таблицу для метода потенциалов

Пункт производства		Пункт потребления				Объемы производства
		1	2	…	n	
		β1	β2	…	βn	
1	α1	X11 C11	X12 C12	…	X1n C1n	a1
2	α2	X21 C21	X22 C22	…	X2n C2n	a2
…	…	…	…	…	…	…
m	αm	Xm1 Cm	Xm2 Cm2	…	Xmn Cmn	am
Объёмы потребления		b1	b2	…	bn	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Рисунок 3-Таблица метода потенциалов

Правила заполнения первой таблицы метода потенциалов

1) Проставляем номера пунктов производства и пунктов потребления.

2) Из условий задачи в соответствующие клетки таблицы переносим значения ai (i=1,2,…,m),bj (j=1,2,..,n) и cij (i=1,2,…,m;j=1,2,…,n), причём cij записываем в правом верхнем углу клетки.

3) В середину клеток, стоящих на пересечении пунктов производства и пунктов потребления записываем ненулевые значения Xij первого опорного решения. Эти клетки будем называть занятыми, а остальные клетки свободными.

4) Рассчитываем значения потенциалов αi (i=1,2,…,m) и βj (j=1,2,…,n), используя условие βj- α i=cij для заполненных клеток таблицы. Причём α1 всегда полагаем равным 0.

5) Рассчитываем значение αij и размещаем их в свободных клетках таблицы.

2. Находим первое опорное решение. Существуют два метода построения первого опорного решения (плана).

Методы поиска первого опорного решения

1). Метод северо-западного угла. Распределять грузы начинаем с северо-западной клетки таблицы. Сначала удовлетворяем потребность 1-го потребителя за счёт продукции 1-го производителя. Если её будет недостаточно, тогда оставшуюся потребность удовлетворяем за счёт 2-го производителя и т.д.

Когда потребность 1-го потребителя будет удовлетворена полностью, то начнём удовлетворять потребность второго потребителя за счёт той продукции, которая осталась у 1-го производителя. Если у него ничего не осталось, то за счёт оставшейся продукции у 2-го производителя и т.д.

2). Метод минимального элемента:

- из всех Cij выбираем самое маленькое;

- в эту клетку ставится требуемый j-ым потребителем объем продукции, или только то количество, которое имеется у i-го производителя;

- выбирается следующее наименьшее Cij и в клетку i-ой строки и j-го столбца заносится обьем перевозимой продукции по тому же принципу;

- операцию повторяют до тех пор, пока весь груз не будет распределён.

Если имеется несколько Cij с одинаковыми значениями, то последовательно заполняем клетки, соответствующие этим значениям.

3. Проверка вырожденности плана. Число ненулевых x ij (т.е. занятых клеток таблицы) должно быть равно (n+m-1). Если их больше, то допущена ошибка при расчете. Если их меньше, то имеем дело с вырожденным решением. В случае вырожденности к неотрицательным x ij дополнительно выбираем несколько x ij = 0, чтобы их количество стало равным (n+m-1), и при этом было удобно рассчитать потенциалы α_i и β_j.

4. Определение целевой функции путем суммирования произведений тарифов на объемы перевозимого груза по всем занятым клеткам транспортной таблицы.

5. Проверка опорного плана на оптимальность.

5.1. Расчет потенциалов α_i и β_j из условия $\beta_j - \alpha_i = C_{ij}$ для $x_{ij} \neq 0,$ т.е. для заполненных клеток таблицы. Так как количество $x_{ij} \neq 0$ равно (n+m-1), а количество потенциалов αi и βj равно (n+m), то α1 полагаем равно нулю.

5.2. Расчет оценок свободных клеток. Для каждой свободной клетки, где $x_{ij} = 0$, вычисляем $\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - C_{ij}$.

Если среди чисел α_{ij} нет положительных, то получено оптимальное решение. Если имеются положительные α_{ij}, то переходим к новому опорному решению.

6. Перераспределение груза. Среди положительных чисел α_{ij} выбираем максимальное. Для свободной клетки, которая соответствует максимальному положительному α_{ij}, строим цикл пересчёта и производим сдвиг продукции по циклу пересчёта.

Цикл пересчёта – это ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья вдоль строк и столбцов, начинается ломаная в пустой клетке пересчёта, соответствующей максимальному положительному αij.

Сдвиг по циклу пересчёта – это процесс перемещения грузов в пределах клеток, связанных циклом пересчёта, который осуществляется по следующим правилам:

- каждой из клеток, находящихся в вершинах цикла, приписывается определенный знак "+" или "-", причем свободной клетке приписывается знак "+", а всем остальным поочередно "-", "+" и т.д.;

- в свободную клетку цикла переносим наименьшее из чисел Xij, стоящих в минусовых клетках. И одновременно это же число прибавляем к значениям Xij, стоящим в плюсовых клетках, и вычитаем из Xij, стоящих в минусовых клетках цикла.

В результате этих действий мы получаем новый опорный план, для которого строим новую таблицу.

7. Получение нового опорного плана. Полученное опорное решение проверяем на оптимальность, т.е. повторяем все действия с этапа 2. Описанная процедура повторяется несколько раз (итераций) пока не будет найдено оптимальное решение.

Задания для самостоятельного решения.

Решить следующие транспортные задачи 5.1-5.10 методом потенциалов.

5.1.

Производители	Потребители			Объём производства
	1	2	3	
1	3	5	6	25
2	6	6	11	25
3	10	6	14	25
Объём потребления	25	30	20	

5.2.

Производители	Потребители				Объём производства
	1	2	3	4	
1	3	2	4	1	50
2	2	3	1	5	40
3	3	2	4	4	20
Объём потребления	20	25	35	20	

5.3

Производители	Потребители				Объём производства
	1	2	3	4	
1	6	3	1	4	40
2	2	5	2	7	40
3	4	10	8	9	60
Объём потребления	30	20	50	50	

5.4.

Производители	Потребители				Объём производства
	1	2	3	4	
1	4	11	3	1	80
2	5	6	7	4	120
3	8	7	6	2	40
4	14	10	10	21	100
Объём потребления	120	20	90	110	

5.5.

Производители	Потребители				Объём производства
	1	2	3	4	
1	8	11	1	4	80
2	5	2	7	3	20
3	10	4	3	5	30
Объём потребления	54	36	25	15	

5.6.

Производители	Потребители			Объём производства
	1	2	3	
1	7	2	4	40
2	3	8	9	25
Объём потребления	10	35	20	

5.7.

Производители	Потребители			Объём производства
	1	2	3	
1	6	4	2	40
2	3	5	7	60
Объём потребления	20	70	10	

5.8.

Производители	Потребители				Объём производства
	1	2	3	4	
1	4	3	2	7	46
2	1	1	6	4	34
3	3	5	9	4	40
Объём потребления	40	35	30	45	

5.9.

Производители	Потребители		Объём производства
	1	2	
1	7	4	70
2	5	9	45
3	3	8	15
Объём потребления	40	90	

5.10.

Производители	Потребители				Объём производства
	1	2	3	4	
1	2	4	5	1	60
2	2	3	9	4	70
3	8	4	2	5	50
Объём потребления	40	30	20	50	

Кейс-задание 6. Решение задач на оптимальное сочетание отраслей

Задача 1.

Построить модель, матрицу и найти оптимальный результат с помощью функции электронной таблицы MS Excel «Поиск решения», результаты записать в тетради на оптимальное сочетание фуражных зерновых, овощей, многолетних трав и молочного скотоводства. Площадь посева многолетних трав должна быть не менее 50 % от площади пашни. Критерий оптимальности - максимум валовой продукции в денежном выражении.

Показатели	Приходится на 1 ц				Объем реверсов
	Зерновых, фуражных культур	Овощей	Сено многолет. трав	Молока	
1. Пашня, га.	0,033	0,01	0,015	-	1500
2.Трудовые ресурсы, (всего), чел.-дн.	0,1	0,71	0,8	1,2	105000
2.Трудовые ресурсы, в напр. период, чел.-дн.	0,031	0,41	0,02	1,2	28670
4.Корма, ц к.ед.	0,9	0,03	0,2	1,5	-
5.Стоимость продукции, руб.	-	7	-	16	

Задача 2.

Составить оптимальное сочетание производства зерновых фуражных культур (построить модель, матрицу и найти оптимальный результат с помощью функции электронной таблицы MS Excel «Поиск решения», результаты записать в тетради), овощеводство и молочного скотоводства. Затраты производственных ресурсов в расчете на 1 ц. продукции и их объем приведены в таблице. Выход кормов с 1 ц. зерновых – 0,9 ц. к.ед., овощей – 0,03 ц. к.ед. Цена реализации 1 ц. овощей – 7 руб., молока – 16 руб. Молока необходимо произвести не менее 2000 т. Критерий оптимальности – максимум товарной продукции в денежном выражении.

Показатели	Зерновые	Овощи	Молоко	Объем реверсов
1. Пашня, га.	0,034	0,0092	-	780
2. Трудовые ресурсы, чел.-ч	2,3	8,1	10	150000

3. Корма, ц к.ед.	-	-	1,5	7250

Задачи 3.

Построить модель, матрицу и найти оптимальный результат с помощью функции электронной таблицы MS Excel «Поиск решения», результаты записать в тетради на оптимальное сочетание зерновых культур, кукурузы на силос, КРС. Площадь пашни в хозяйстве 2520 га. Зерновые выращиваются на товарные и кормовые цели. Под кукурузой на силос нежно засеять не менее 40 % от площади пашни. Критерий оптимальности - максимум прибыли.

Показатели	Приходится на			Объем реверсов
	1 га зерновых культур	1 га кукурузы на силос	1 усл. гол. на КРС	
1. Трудовые ресурсы, чел.-ч	25	32	29	90500
2. Корма, ц к.ед.	28	60	58	-
3.Органические удобрения, т.	4	5	7	5000
4.Прибыль, руб.	150	-	980	-

Задача 4.

Найти оптимальное сочетание трех отраслей: зерна, сахарной свеклы на корм и свиноводство, обеспечивающие хозяйству максимальную прибыль. На корм используется 60% валового сбора зерна и весь сбор сахарной свеклы. В 1 ц зерна содержится 1,2 ц. к.ед., в 1 ц свеклы – 0,12 ц. к.ед. (построить модель, матрицу и найти оптимальный результат с помощью функции электронной таблицы MS Excel «Поиск решения», результаты записать в тетради).

Производственные ресурсы	Затраты на 1 ц.			Объем ресурсов
	Зерна	Свеклы	Привеса свиней	
1.Пашня, га.	0,045	0,055	-	5000
2.Затраты труда, чел. – дн.	0,1	0,1	2	100000
3.Корма, ц к.ед.	-	-	5	-
4.Прибыль от реализации 1ц., руб.	5	3,1	60	-

Определить сочетание отраслей, обеспечивающие максимум прибыли.

3.2.2. Методические материалы

Обучающиеся выполняют кейс-задания. За правильное выполнение каждого кейс-задания – 5 баллов. Условия и порядок проведения текущего контроля знаний представлены ПВД-07 «О проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся».

3.3. Комплект вопросов к зачету с оценкой

3.3.1. Вопросы:

1. Задачи курса, его место в системе экономических дисциплин.
2. Цели и методы экономико-математического анализа.
3. История развития экономико-математического моделирования как науки.
4. Схема экономико-математического анализа результатов оптимального решения задач ЛП.
5. Основы теории моделирования: понятия модели и моделирования, виды моделей.
6. Причины несовместности системы ограничений задачи ЛП и последовательность действий для ее устранения.
7. Классификация экономико-математических моделей.

8. Преимущества исследования экономических систем с использованием экономико-математического моделирования.
9. Этапы экономико-математического моделирования.
10. Основные теории систем и системного анализа: понятие системы и ее основные признаки.
11. Балансовые модели и их математическая запись, метод поиска решения в балансовых моделях.
12. Взаимодействие системы с внешней средой. Входные, выходные величины и параметры системы.
13. Многокритериальная задача, ее геометрическая интерпретация, методы решения многокритериальных задач.
14. Классификация экономических систем.
15. Экономико-математическая модель оптимального рациона кормления животных.
16. Понятие системы управления в экономике.
17. Экономико-математическая модель производственной программы предприятия.
18. Экономико-математическая модель годового оборота стада КРС.
19. Основы эффективного управления экономическими системами.
20. Информационное обеспечение систем управления в экономике.
21. Экономико-математическая модель производственно-отраслевой структуры сельскохозяйственного предприятия.
22. Информационная технология управления экономической системой.
23. Инвестиционный проект, его жизненный цикл, классификация проектов.
24. Критерии оценки эффективности инвестиционных проектов.
25. Основные понятия теории линейного программирования (ЛП): переменные, ограничения, целевая функция, область определения, допустимое, опорное и оптимальное решения.
26. Временная стоимость денег и учет ее в оценке инвестиционных проектов.
27. Математическая формулировка задачи ЛП и ее основные виды.
28. Матричная, развернутая и сокращенная форма записи задачи ЛП.
29. Методы составления денежного потока инвестиционного проекта.
30. Способы преобразования произвольной задачи ЛП к каноническому виду
31. Источники финансирования инвестиционного проекта.
32. Геометрическая интерпретация решения задачи ЛП. Возможные варианты решения задачи ЛП.
33. Однопродуктовая динамическая модель макроэкономики.
34. Методы решения задач ЛП.
35. Однопродуктовая оптимизационная динамическая модель макроэкономики.
36. Нелинейная оптимизационная модель развития многоотраслевой экономики.
37. Двойственная задача ЛП и правила ее построения.
38. Первая и вторая теорема двойственности.
39. Модель размещения регионального заказа по предприятиям.
40. Модели спроса.

3.3.2. Методические материалы

Обучающимся выдаются вопросы для зачета с оценкой, по которым они самостоятельно готовятся. Зачет с оценкой проводится в форме устного собеседования.

Порядок проведения зачета с оценкой соответствует Положению ПВД-07 «О проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся».